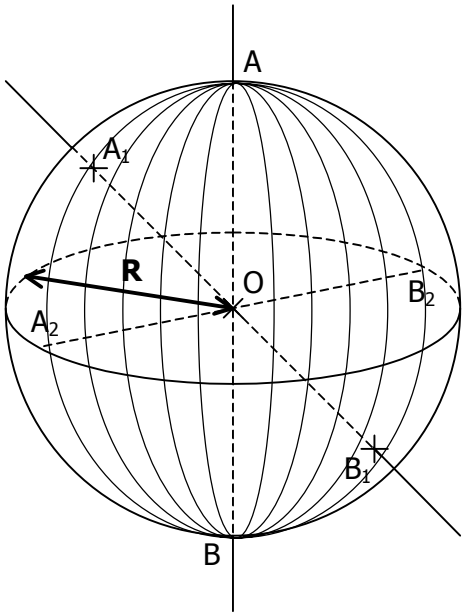
I. SPHÈRE.

a. Définition :

Soit O un point de l'espace.

On appelle **sphère de centre O et de rayon R** l'ensemble de tous les points de l'espace qui sont situés à une distance R du point O.



Les segments [AB], [A_1B_1] et [A_2B_2] sont des **diamètres** de la sphère.

On dit que les points A et B sont **diamétralement opposés**.

Remarque : L'intérieur de la sphère est appelé « boule de centre O ».

b. Aire de la sphère :

L'aire de la sphère de rayon R est donné par la formule :

$$\mathbf{A = 4\pi R^2}$$

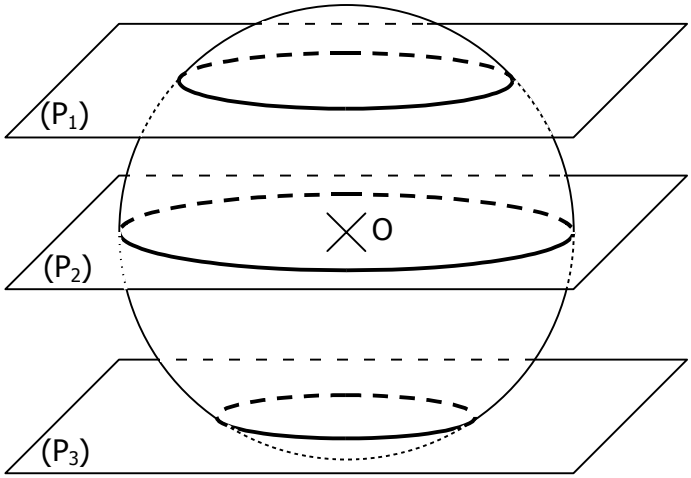
c. Volume de la boule :

Le volume d'une boule de rayon R est donné par la formule :

$$\mathbf{V = \frac{4}{3}\pi R^3}$$

II. SECTION D'UNE SPHÈRE PAR UN PLAN.

La section d'une sphère par un plan est un cercle.

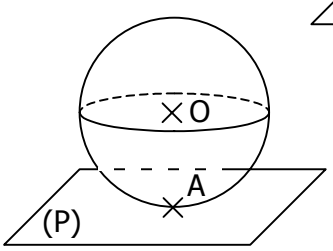


Remarque :

Quand le plan passe par le centre O (Plan P_2), le cercle a le même rayon que la sphère. On dit que c'est un **grand cercle** de la sphère.

Cas particulier :

Quand la section de la sphère par le plan n'est qu'un point (un « cercle de rayon nul »), on dit que le plan est **tangent** à la sphère.

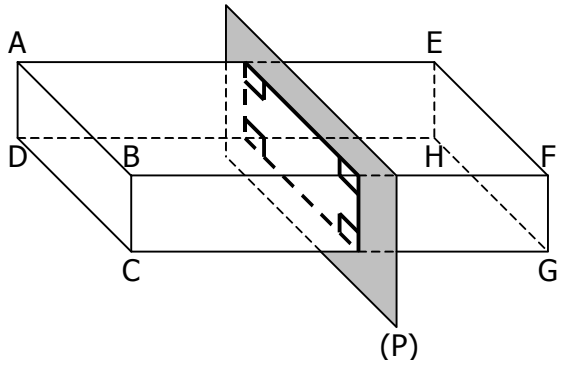


III. SECTION D'UN PAVÉ PAR UN PLAN.

La section d'un pavé droit par un plan parallèle à une face est un rectangle identique à cette face.

Exemple :

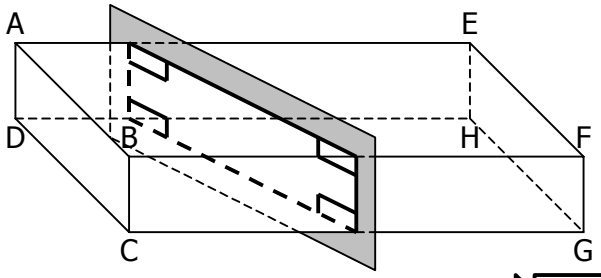
Le plan (P) est parallèle à la face ABCD (ou EFGH) :



La section d'un pavé droit par un plan parallèle à une arête est un rectangle.

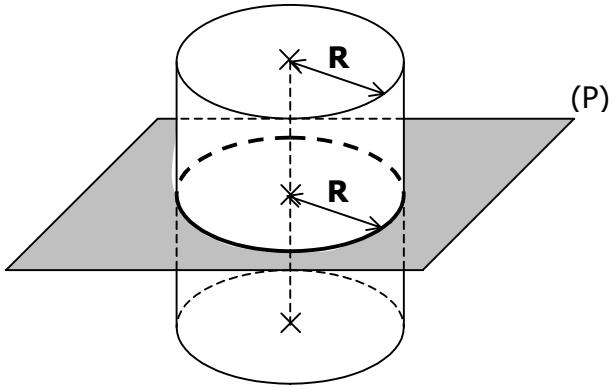
Exemple :

Le plan (P) est parallèle à l'arête [AD] (ou [BC] ou [EH] ou [FG]) :

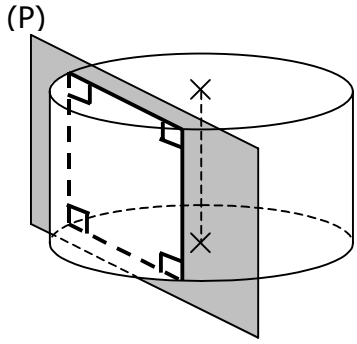


IV. SECTION D'UN CYLINDRE DE RÉVOLUTION PAR UN PLAN.

La section d'un cylindre de rayon R par un plan parallèle aux bases est un cercle de rayon R.

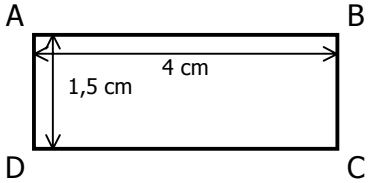


La section d'un cylindre par un plan parallèle à l'axe de révolution est un rectangle.



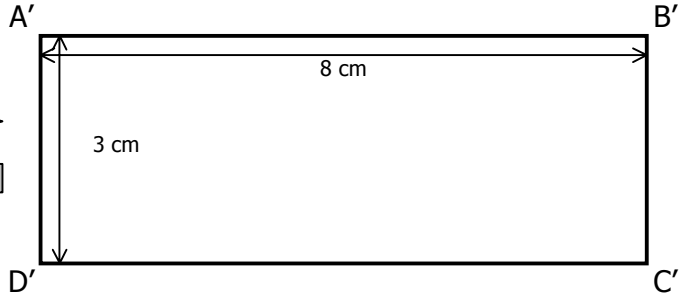
V. SECTIONS D'UNE PYRAMIDE OU D'UN CÔNE PAR UN PLAN.

a. Agrandissement et réduction (Exemple) :



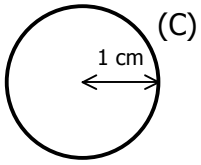
Le rectangle A'B'CD' est obtenu à partir du rectangle ABCD par un **agrandissement de rapport 2**, c'est à dire que toutes les longueurs ont été **multipliées par 2**.

Le rectangle ABCD est obtenu à partir du rectangle A'B'C'D' par une **réduction de rapport 2**, c'est à dire que toutes les longueurs ont été **divisées par 2** (ou **multipliées par ½**).



b. Effet d'une réduction ou d'un agrandissement sur des aires ou des volumes :

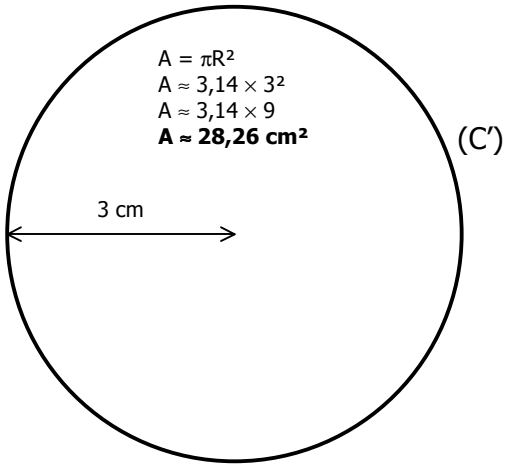
$A = \pi R^2$
$A \approx 3{,}14 \times 1^2$
$A \approx 3{,}14$ cm²



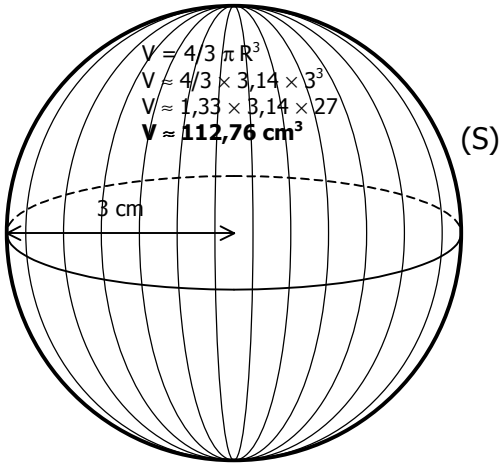
Le cercle (C') a été obtenu à partir du cercle (C) par un **agrandissement de rapport 3.**

- Les longueurs ont été multipliées par 3.
- L'**aire** a été multipliée par $3^2 = 9$.

$A = \pi R^2$
$A \approx 3{,}14 \times 3^2$
$A \approx 3{,}14 \times 9$
$A \approx 28{,}26$ cm²

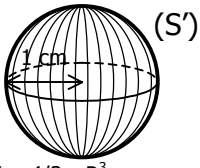


$V = 4/3\ \pi R^3$
$V \approx 4/3 \times 3{,}14 \times 3^3$
$V \approx 1{,}33 \times 3{,}14 \times 27$
$V \approx 112{,}76$ cm³



La sphère (S') a été obtenu à partir de la sphère (S) par **une réduction de rapport 3**.

- Les longueurs ont été divisées par 3 (ou multipliées par1/3).
- Le **volume** a été divisé par $3^3 = 27$ (ou multiplié par 1/27).



$V = 4/3\ \pi R^3$
$V \approx 4/3 \times 3{,}14 \times 1^3$
$V \approx 1{,}33 \times 3{,}14 \times 1$
$V \approx 4{,}18$ cm³

Propriété :

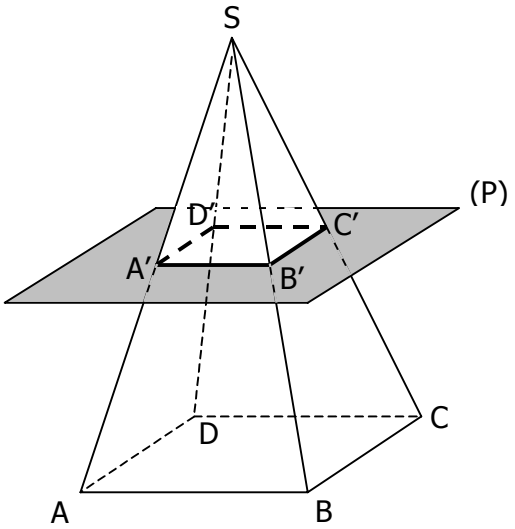
Dans un agrandissement (ou *une réduction*) de rapport k :

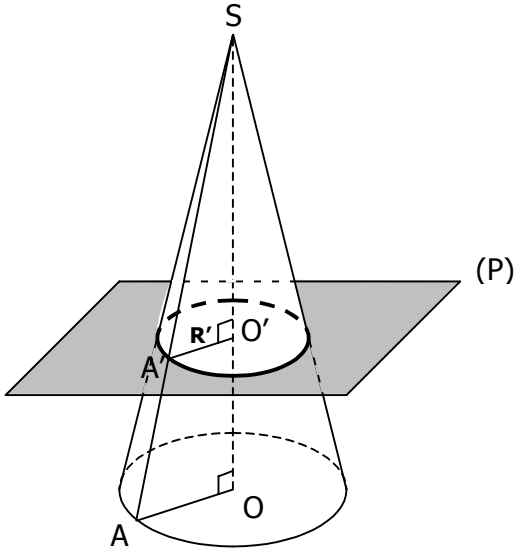
- Les **longueurs** sont multipliées (ou *divisées*) par **k**.
- Les **aires** sont multipliées (ou *divisées*) par $\mathbf{k^2}$.
- Les **volumes** sont multipliés (ou *divisées*) par $\mathbf{k^3}$.

c. Sections d'une pyramide ou d'un cône par un plan

La section d'une pyramide ou d'un cône de révolution par un plan parallèle à la base est une **réduction de la base**.

C'est à dire que c'est une figure de même nature (rectangle, carré, cercle…) mais dont les longueurs sont proportionnelles à la base.





PYRAMIDE

On remarque que :

(AB)//(A'B') (BC)//(B'C') (CD)//(C'D') (DA)//(D'A')

D'après la propriété de Thalès, on peut donc écrire :

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'D'}{CD} = \frac{D'A'}{DA} = k$$

C'est le rapport de la réduction (donc < 1)

CÔNE DE RÉVOLUTION

On remarque que :

(OA) // (OA')

D'après la propriété de Thalès, on peut donc écrire :

$$\frac{SO'}{SO} = \frac{SA'}{SA} = \frac{A'O'}{AO} = k$$

C'est le rapport de la réduction (donc < 1)

Exercice résolu :

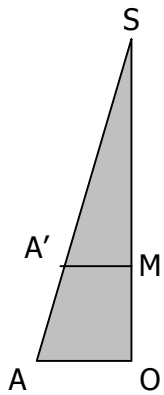
On considère un cône de révolution de sommet S

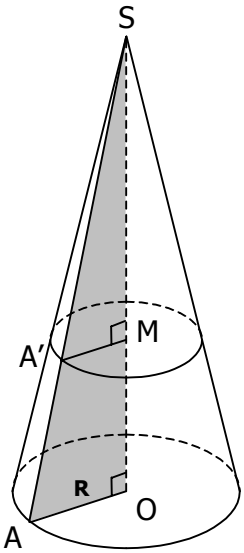
- Sa base est un disque de rayon OA = 6 cm.
- Sa hauteur SO = 15 cm.

M est le point de la hauteur tel que SM = 10 cm.

Le plan parallèle à la base passant par M coupe SA en A'.

Question : Calculer le rayon de la section du cône avec ce plan.





Les points S, M, O sont alignés.

Les points S, A', A sont alignés.

Puisque les droites (AO) et (A'M) sont parallèles, alors d'après le théorème de Thalès :

$$\frac{SM}{SO} = \frac{SA'}{SA} = \frac{A'M}{AO}$$

$$\frac{10}{15} = \frac{A'M}{6} \text{ d'où } A'M = 4 \text{ cm.}$$