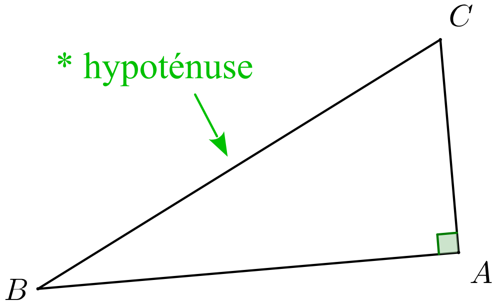
I. Théorème de Pythagore - propriété directe

1. Énoncés de la propriété directe de Pythagore

* Dans un triangle rectangle, le carré de la longueur de l'hypoténuse* est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés.



* Si ABC est un triangle rectangle en A ,
  alors $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

* L' hypoténuse d'un triangle rectangle est le côté opposé à l'angle droit , c'est aussi le plus long côté du triangle.

* Cette propriété permet de calculer la longueur d'un côté dans un triangle rectangle lorsqu'on connaît les deux autres .

2. Exemples simples

* Exemple 1 : ABC est un triangle rectangle en A, avec $AB = 9\,cm$ et $AC = 11\,cm$. Calcule BC.
  - Solution :

    Le triangle ABC est rectangle en A ,
    donc, d'après la propriété directe de Pythagore ,

    $$BC^2 = AB^2 + AC^2 .$$

    Donc $BC^2 = 9^2 + 11^2$,
    d'où $BC^2 = 202$,
    et donc $BC = \sqrt{202} \approx 14{,}2\,cm$.

* Exemple 2 : ABC est un triangle rectangle en A, avec $AB = 8\,cm$ et $BC = 17\,cm$. Calcule AC.
  - Solution :

    Le triangle ABC est rectangle en A ,
    donc, d'après la propriété directe de Pythagore ,

    $$BC^2 = AB^2 + AC^2 .$$

    Donc $AC^2 = BC^2 - AB^2$,
    donc $AC^2 = 17^2 - 8^2$,
    d'où $AC^2 = 225$,
    et donc $AC = \sqrt{225} = 15\,cm$.

JC Salmon - jc.salmon.74@orange.fr

II. Propriété réciproque de Pythagore

1. Énoncé

* Dans un triangle ABC,
  si $BC^2 = AB^2 + AC^2$, alors le triangle ABC est rectangle en A .

* Cette propriété permet de démontrer qu'un triangle est rectangle,
  lorsqu'on connaît les longueurs de ses trois côtés ,
  mais *ne permet pas* de démontrer qu'un triangle *n'est pas* rectangle .

* Remarques :
  - Pour démontrer que $BC^2 = AB^2 + AC^2$, on doit calculer séparément BC^2 et $AB^2 + AC^2$.
  - On ne peut pas parler d' hypoténuse dans un triangle qui n'est pas rectangle .

2. Exemples

* EFG est un triangle, avec $EF = 6\,cm$; $EG = 10\,cm$ et $FG = 8\,cm$.
  Le triangle EFG est-il rectangle ? Si oui, en quel sommet ?
  - Solution :

    Le plus long côté est [EG] ;
    - $EG^2 = 10^2 = 100$,
    - $EF^2 + FG^2 = 6^2 + 8^2 = 100$.

    donc $EG^2 = EF^2 + FG^2$.
    Donc, d'après la propriété réciproque de Pythagore,
    le triangle EFG est rectangle en F.

* IJK est un triangle, avec $IJ = 9\,cm$; $IK = 6\,cm$ et $JK = 7\,cm$.
  Le triangle IJK est-il rectangle ? Si oui, en quel sommet ?
  - Solution :

    Le plus long côté est [IJ] ;
    - $IJ^2 = 9^2 = 81$,
    - $IK^2 + JK^2 = 6^2 + 7^2 = 85$,

    donc $IJ^2 \neq IK^2 + JK^2$.
    Si le triangle IJK était rectangle, on aurait,
    d'après la propriété directe de Pythagore, $IJ^2 = IK^2 + JK^2$,
    donc le triangle IJK n'est pas rectangle.