I. Racine carrée d'un nombre positif

1. Définition

* La racine carrée d'un nombre positif a est le nombre positif dont le carré est a.
* Exemples :
  - $\sqrt{225}=15$ car $15\times15=225$;
  - $\sqrt{169}=13$ car $13^2=169$;
  - $\sqrt{9.10^{-8}}=3.10^{-4}$ car $(3.10^{-4})^2=3^2\times(10^{-4})^2=9\times10^{-4}$;
* Remarques - cas particuliers
  - Un nombre strictement négatif n'a pas de racine carrée : $\sqrt{-7}$ n'existe pas.
  - Ne pas confondre la racine carrée et la moitié : $\sqrt{16}=4$ et non 8.
  - $\sqrt{0}=0$;
  - $\sqrt{1}=1$;

2. Propriétés

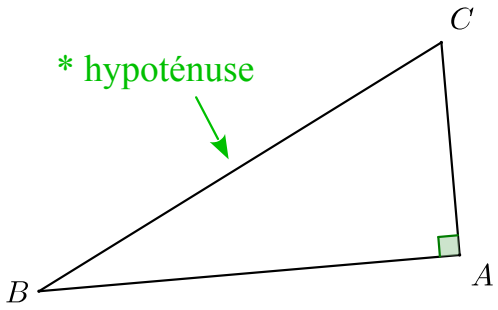
* Si $a\geqslant0$, alors $(\sqrt{a})^2=a$. Cela découle directement de la définition.
* Si $a\geqslant0$, alors $\sqrt{a^2}=a$.

usage commercial avec accord de l'auteur

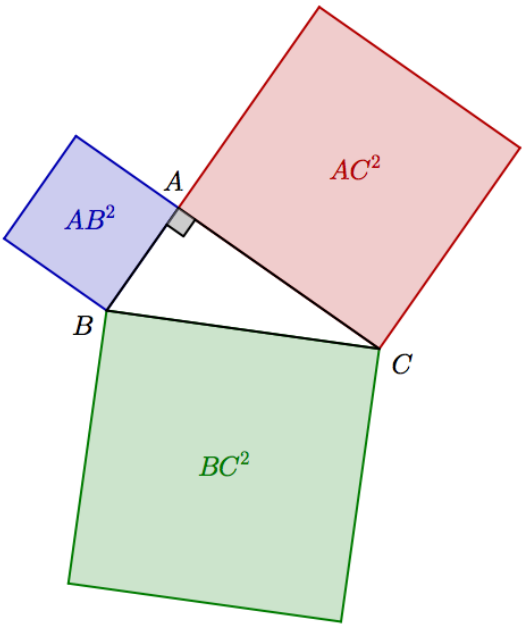
II. Théorème de Pythagore

1. Propriété directe de Pythagore

* Dans un triangle rectangle, le carré de la longueur de l'hypoténuse* est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés.



* Si ABC est un triangle rectangle en A ,
alors $BC^2 = AB^2 + AC^2$.



* L'hypoténuse d'un triangle rectangle est le côté opposé à l'angle droit ,
c'est aussi le plus long côté du triangle.

* Cette propriété permet de calculer la longueur d'un côté dans un triangle rectangle lorsqu'on connaît les deux autres.

2. Propriété réciproque de Pythagore

* Dans un triangle ABC, si $BC^2 = AB^2 + AC^2$,
alors le triangle ABC est rectangle en A.
* Cette propriété permet de démontrer qu'un triangle est rectangle,
lorsqu'on connaît les longueurs de ses trois côtés ,
mais *ne permet pas* de démontrer qu'un triangle *n'est pas* rectangle.
* Remarques :
  - Pour démontrer que $BC^2 = AB^2 + AC^2$, on doit calculer séparément BC^2 et $AB^2 + AC^2$.
  - On ne peut pas parler d'hypoténuse dans un triangle qui n'est pas rectangle.

usage commercial avec accord de l'auteur

3. Exemples simples

* Exemple 1

ABC est un triangle rectangle en A, avec $AB = 9\,cm$ et $AC = 11\,cm$. Calcule BC.

▸ Solution :

Le triangle ABC est rectangle en A ,

donc, d'après la propriété directe de Pythagore,

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 .$$

Donc $BC^2 = 9^2 + 11^2$,

donc $BC^2 = 81 + 121$,

d'où $BC^2 = 202$,

et donc $BC = \sqrt{202} \approx 14{,}2\,cm$.

* Exemple 2

ABC est un triangle rectangle en A, avec $AB = 8\,cm$ et $BC = 17\,cm$. Calcule AC.

▸ Solution :

Le triangle ABC est rectangle en A ,

donc, d'après la propriété directe de Pythagore,

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 .$$

Donc $17^2 = 8^2 + AC^2$,

donc $289 = 64 + AC^2$,

donc $AC^2 = 289 - 64$,

d'où $AC^2 = 225$,

et donc $AC = \sqrt{225} = 15\,cm$.

* Exemple 3

EFG est un triangle, avec $EF = 6\,cm$; $EG = 10\,cm$ et $FG = 8\,cm$.

Le triangle EFG est-il rectangle ? Si oui, en quel sommet ?

▸ Solution :

Le plus long côté est $[EG]$;

- $EG^2 = 10^2 = 100$,
- $EF^2 + FG^2 = 6^2 + 8^2 = 100$.

donc $EG^2 = EF^2 + FG^2$.

Donc, d'après la propriété réciproque de Pythagore,

le triangle EFG est rectangle en F.

* Exemple 4

IJK est un triangle, avec $IJ = 9\,cm$; $IK = 6\,cm$ et $JK = 7\,cm$.

Le triangle IJK est-il rectangle ? Si oui, en quel sommet ?

▸ Solution :

Le plus long côté est $[IJ]$;

- $IJ^2 = 9^2 = 81$,
- $IK^2 + JK^2 = 6^2 + 7^2 = 85$,

donc $IJ^2 \neq IK^2 + JK^2$.

Si le triangle IJK était rectangle, on aurait,

d'après la propriété directe de Pythagore, $IJ^2 = IK^2 + JK^2$,

donc le triangle IJK n'est pas rectangle.

usage commercial avec accord de l'auteur